

一种基于误差控制的网格多分辨模型生成算法

唐 杰 张福炎

(南京大学软件新技术国家重点实验室 南京 210093)

(南京大学计算机科学与技术系 南京 210093)

摘 要 提出一种网格多分辨模型生成算法. 该算法以最大误差 L_∞ 控制的网格简化算法为基础, 通过删除边和拆分点操作进行向下和向上采样, 将网格模型表示为由一个低分辨率的网格和一系列修改操作组成的多分辨模型. 同其它算法相比, 该算法在初始向下采样时, 重点考虑了简化误差对模型精度的影响. 在生成网格多分辨模型时, 该算法将细化操作分解为对网格模型的几何修改信息和各细化操作之间的关系信息, 确保了多分辨模型的健壮性. 该算法可通过三角片数和简化误差两种方法来调整网格模型分辨率, 实验结果证明了本算法的有效性.

关键词 三角网格; 网格简化; 多分辨模型; 层次细节模型; 几何造型

中图法分类号 TP391

An Algorithm for Generating Multiresolution Model of Mesh Based on Error Control

TANG Jie ZHANG Fu Yan

(State Key Laboratory for Novel Software Technology, Nanjing University, Nanjing 210093)

(Department of Computer Science and Technology, Nanjing University, Nanjing 210093)

Abstract This paper puts forward a new algorithm to generate multiresolution model of mesh. The algorithm is based on a mesh simplification method controlled by L_∞ error. Edge contraction and vertex split are adopted as downsampling and upsampling method respectively. The multiresolution model is represented as a base mesh and a list of refinement operations. Compared with former methods, the algorithm uses L_∞ error to control the mesh simplification during the initial downsampling process. While constructing the multiresolution model, the algorithm decomposes the refinement operations into the modifications to the mesh and the dependency relations, thus ensures the robustness of the multiresolution model. Experiment results demonstrate the efficiency and stability of this method.

Keywords triangle mesh; mesh simplification; multiresolution model; level of detail; geometric modeling

1 引 言

三角网格模型的数学描述较为简单, 通用性和灵活性也较好, 且用于三角网格模型显示的硬件加速设备也得到快速发展, 因而三角网格广泛用于真

实感图形显示、数控加工刀具轨迹计算和干涉检查、快速原型制造、医用图像、地理地形绘制、计算机游戏等多个应用领域. 但是, 尽管具有许多优点, 三角网格模型本身还是存在两个主要缺点: (1) 因为三角网格模型本质上是用离散线性曲面片, 即三角片, 去逼近原始曲面模型, 所以当精度要求较高时, 需要的

收稿日期: 2003 09 30; 修改稿收到日期: 2005 03 23. 唐 杰, 男, 1971 年生, 博士, 博士后研究人员, 主要研究方向为 CAD/CAM、计算机辅助几何设计、计算机图形学. E-mail: jietang@graphics.nju.edu.cn. 张福炎, 男, 1939 年生, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为计算机图形学、多媒体技术.

三角片较多,这对机器的资源要求较高,且不利于存储、传输。(2)三角网格模型一经生成,其所包含的三角片数量是固定不变的,即三角网格模型具有固定的分辨率,这个特点给三角网格模型的使用带来很多不便。比如,有时在不必要的情况下使用精度较高的模型造成系统资源浪费甚至运行困难,而有时使用较粗糙的网格模型则又达不到精度要求。

针对上述缺点,研究人员提出了一些解决方法,如网格简化^[1,2]、层次细节模型^[3]、递进网格^[4]以及网格多分辨模型等。在这些方法中网格多分辨模型是最为有效的一种,它将一个三角网格表示为一个基网格和一系列对网格模型的修改操作,可以得到任意分辨率的网格模型。网格多分辨模型的提出较好地解决了网格模型只有单分辨率的缺点,使得在不同的情况下,使用不同分辨率的网格成为可能,提高了网格模型的适应性。根据采样方法的不同,目前的网格多分辨模型生成技术可分为两大类。一类是 Eck^[5]等人的算法,他们的算法要求网格模型具有子分连通性(subdivision connectivity)。如初始网格不具备上述条件,必须对其预处理,通过重采样来使网格模型具有子分连通性。这增加算法消耗,也引入了不稳定因素。另一类算法以 Hoppe^[6]为代表, Kobbelt^[7], Guskov^[8]和我国的刘新国^[9]、成迟意^[10]等做了进一步研究。这类算法通过网格简化技术对网格模型进行向下采样,并在此基础上以网格细化作为向上采样方法,进而实现网格模型的多分辨表示。后一类方法可处理任意网格模型,具有较强的通用性,因而成为研究的重点。

随着逆向工程技术的迅速推广以及坐标测量机的不断普及,三角网格越来越多地用于造型。此外,电影特技的发展也要求对网格模型能够方便地编辑、存储等。然而,我们注意到目前国内外关于网格模型处理算法的研究大多是针对真实感图形显示或虚拟现实技术的。而对于用于造型的网格模型,尤其是用于加工的模型,许多相关算法不够严谨,无法满足要求,而实现这些算法对于网格模型在造型领域的应用前景至关重要。另外,目前大多数算法都是通过控制三角片数或顶点数来调整网格模型分辨率,而不能以网格模型的简化误差来控制其分辨率。为了使简化网格的误差满足要求,往往需要反复地尝试,很不方便。

有鉴于此,本文提出一种网格多分辨模型生成算法。该算法在向下采样时,重点考虑了简化误差对模型精度的影响,在生成网格多分辨模型时,该算法

将细化操作分解为对网格模型的几何修改信息和各细化操作之间的关系信息,同时,该算法将全局简化误差保存在每一步修改操作中,既确保了多分辨网格模型的健壮性,又使得通过全局最大简化误差来控制分辨率成为可能。

2 采 样

多分辨分析是一种有效的信号处理工具。建立网格的多分辨模型要求对网格模型能够方便、正确地进行向上和向下采样。然而,网格模型不存在声音或图片等数字信号所具有的很直接、很方便的采样方法。这是因为首先网格模型是定义在一个二维流形,而不是声音的一维和图像的二维欧氏空间。其次网格模型不仅包含有几何信息,还包含有较为复杂的连通性信息,即网格模型中各顶点之间连接状况,而声音或图像中的采样点通过其索引即可确定其相互之间的拓扑关系。因此,对网格模型进行向下采样或向上采样时,不能简单地去除或添加顶点,还必须修改顶点的连通性。此外,声音和图像信号可以方便地做到光滑和均匀采样,而三角网格采样顺序就复杂的多。

本文采用基于删除边的网格简化进行向下采样。删除边网格简化算法的基本思路是首先对网格模型中的每一条边,计算其被删除的优先值,然后按优先值的顺序依次删除网格模型中的边(如图1所示)。当然每删除一条边后,须重新计算受影响区域中所有边的优先值,每次删除还必须保证没有病态三角片产生。删除边操作要考虑的问题主要有两个:

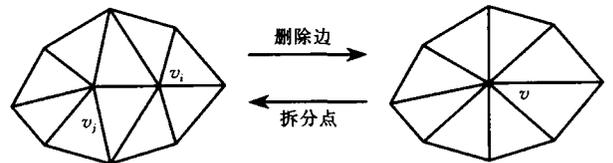


图 1 删除边和拆分点操作

- (1) 如何计算删除一条边的优先值。
- (2) 如何安排删除边后生成顶点的位置。

2.1 删除误差

删除优先值的选择非常重要。它应当使网格在被简化后,能最大程度地保留原始网格的信息。Hoppe^[11]、Garland^[12]、Kim^[13]等研究人员提出了许多不同的方法。然而,这些算法都没能在简化过程中控制 L_∞ 误差,而 L_∞ 误差在造型领域中非常重要,为此我们采用计算点到三角片的距离取代点到平面

的距离, 并给每个三角片分配一些检测点, 以此达到在简化过程中控制 L_∞ 误差的目的. 具体步骤如下: 首先在网格模型表面选取检测点. 顶点集 V 中的点可全部作为检测点, 另外在棱边和尖角等区域应采集更多的检测点, 并将检测点分配至其所属的三角片. 接着计算每条边被删除后, 网格模型产生的误差. 该误差具体表示为被删除的三角片所包含的检测点到修改后的三角片集的距离中的最大值, 并以此误差作为删除该边的优先值. 然后对所有边按删

除误差排序, 从低到高依次删除边, 直到达到预定要求为止. 在删除某条边后, 应根据检测点的不同情况, 重新分配检测点, 以保持初始网格模型的信息不被丢失. 如图 2 所示, 当检测点的投影位于某三角片内时, 该检测点只被分配到该三角片; 当检测点的投影位于某条边上时, 该检测点被分配到该条边的两个邻接三角片; 当检测点的投影为某个顶点时, 该检测点被分配到该顶点的邻接三角片.

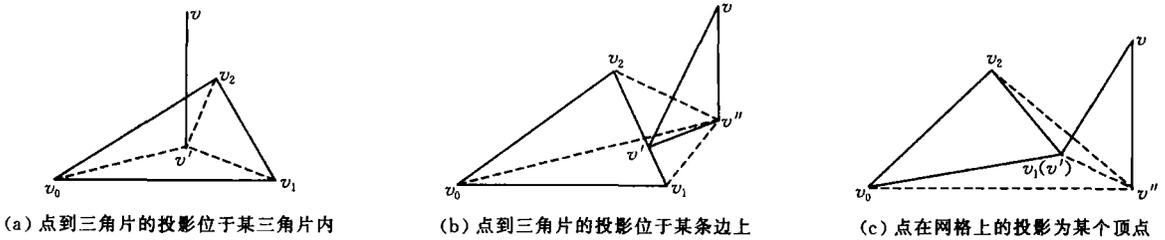


图 2 点到三角片的投影

2.2 删除边所生成顶点的位置

如图 1 所示, 在删除边操作中, 网格模型中的某条边被一个顶点取代, 我们称该点为目标点. 目标点的位置如何确定将决定网格模型的形状在该处如何改变, 也将影响该删除边所引起的误差大小. 最简单的方法是采用子集法, 即以被删除边的两个顶点中删除优先值较小的一个作为目标点. 这样做的好处是简单, 系统资源消耗较少. 但子集法不能很好地保持模型的特征. 为此, 我们提出一种算法通过体积优化来确定目标点的位置.

如图 3 所示, 当边 $v_i v_j$ 被删除, 且目标点定为 v

时, 引起的体积变化是以边 $v_i v_j$ 的相邻三角片为底面, 目标点 v 为顶点的四面体的体积之和. 对于每个四面体, 其体积为

$$V_i = \frac{1}{6} \mathbf{n}_i^T (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) = \frac{1}{6} (\mathbf{n}_i^T \mathbf{v} + d),$$

其中, \mathbf{n}_i 为底面三角片的法矢, \mathbf{v} 为目标点, \mathbf{v}_0 为底面三角片中的一个顶点, $d = \mathbf{n}_i^T \mathbf{v}_0$. 去掉常量系数, 一个四面体的体积平方可写为

$$\begin{aligned} V_i^2 &= (\mathbf{n}_i^T \mathbf{v} + d)^2 = (\mathbf{v}^T \mathbf{n}_i + d)(\mathbf{n}_i^T \mathbf{v} + d) \\ &= \mathbf{v}^T \mathbf{n} \mathbf{n}_i^T \mathbf{v} + 2(d \mathbf{n}_i)^T \mathbf{v} + d^2 \\ &= \mathbf{v}^T \mathbf{A}_i \mathbf{v} + 2\mathbf{b}_i^T \mathbf{v} + c_i. \end{aligned}$$

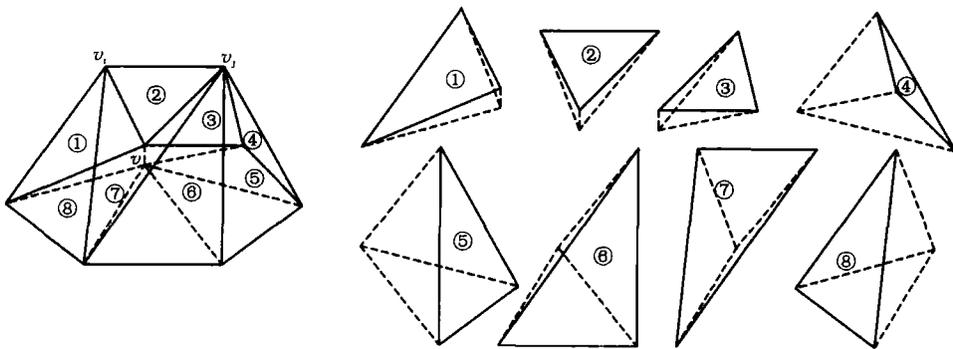


图 3 删除一条边引起的体积变化

所有四面体的体积平方和为

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v}) &= \sum V_i^2 = \sum (\mathbf{v}^T \mathbf{A}_i \mathbf{v} + 2\mathbf{b}_i^T \mathbf{v} + c_i) \\ &= \mathbf{v}^T \sum \mathbf{A}_i \mathbf{v} + 2 \sum \mathbf{b}_i^T \mathbf{v} + \sum c_i \\ &= \mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{v} + 2\mathbf{b}^T \mathbf{v} + c. \end{aligned}$$

为了在简化过程中达到体积优化的目的, 我们希望通过调整目标点 \mathbf{v} 的位置来使删除该条边所引

起的体积变化最小, 即使式 (3) 中 $f(\mathbf{v})$ 值达到最小. 可以看出, $f(\mathbf{v})$ 是一个二次函数, 因此 \mathbf{v} 值可以通过对其求一次导数得到, 解 $f'(\mathbf{v}) = 0$ 得

$$\mathbf{v} = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}.$$

如果矩阵 \mathbf{A} 奇异, 没有逆矩阵, 则采用子集法确定目标点的位置.

3 多分辨模型

如前所述, 网格多分辨模型是一种描述三角网格的高效的数据结构. 它可以根据不同的需要提供任意分辨率的网格模型. 网格多分辨模型的提出较好地解决了网格模型只有单一分辨率的缺点, 提高了网格模型的适应性. 多分辨模型数据结构通常包含两方面信息: 首先是对网格模型的修改信息; 其次是各修改操作之间的关系信息. 一个具有较好数据结构的多分辨模型应能方便、正确地选择不同的分辨率以及有选择地对网格模型不同区域进行细化或简化操作.

3.1 网格模型修改信息

对网格模型的修改由一对可逆单元操作完成: 细化操作和简化操作. 本文的细化操作为拆点, 简化操作为删除边. 网格模型修改信息应能确保该两重操作对网格模型进行正确地修改. 为了降低存储消耗, 我们只记录每个修改操作的修改信息, 而不是修改后的顶点和三角片的所有信息, 具体结构为:

```

struct Modification
{
    vertex * vi, vj; //被删除边的两个顶点
    vector vecDeltaVi, vecDeltaVj;
    //vi, vj 与新顶点之间的位置差
    CArray< CTriangle * > arrDeadFaces
    //被删除的三角片
    CArray< CTriangle * > arrModifiedFaces
    //被修改的三角片
    struct Modification * pModification //父删除操作
    double dError //该删除操作引起的误差
}

```

上述修改信息在对初始网格进行向下采样时生

成. 利用该结构的信息, 我们可以方便地从一个粗糙网格通过拆分操作生成一个细化网格, 也可以从细化网格通过删除边操作简化为一个粗糙网格. 我们可以通过控制网格模型中三角片数来选择分辨率, 也可以通过简化误差来控制网格模型的分辨率.

3.2 修改操作之间的关系

多分辨模型中各修改操作之间存在一定的依赖关系, 这种依赖关系是在对初始网格进行向下采样时生成. 如果在选择分辨率时, 忽略了这种关系进行修改操作会导致病态或错误三角片的出现, 甚至造成网格模型崩溃. 目前大多数算法将修改操作之间的关系定义在各顶点上. Xia 等^[4]认为当某条边被删除成一个顶点 v 后, 其所有邻接点都依赖于 v , 这种方法确保不会遗漏依赖关系. Hoppe^[6]为了提高速度, 认为只有 6 个顶点依赖于 v , 即与被删除的 2 个三角片相邻的 4 个三角片的顶点. 但这并不能保证所产生的依赖关系的正确性, 在使用过程中, 仍有产生病态三角片的可能. Xia 和 Hoppe 等都将各修改操作的依赖关系组织成树或森林, 但实际上从他们的定义中可以看出这种依赖关系应该超出了树或森林的描述范围.

本文将修改操作的依赖关系定义在修改信息上. 为了确保多分辨模型的正确性, 我们采用 Xia 的原则, 即在对初始网格进行向下采样时, 如果一条边被删除, 则其所有邻接点所参与的修改操作都依赖于此删除操作. 如图 4 所示, 边 11-12 被删除, 生成一个修改操作 M_1 , 并分配给删除后的顶点 11, 顶点 12 死亡. 由于顶点 11 的所有邻接点都是初始点, 所以没有依赖关系生成. 接着, 边 4-5 被删除, 生成修改操作 M_2 , 并分配给新顶点 4, 顶点 5 死亡. 这时, 由于顶点 11 是顶点 4 的邻接点, 则在细化时, M_1 依赖于 M_2 , 即 M_2 未拆分前, M_1 不能拆分. 如此循环直至完成所有依赖关系的确定.

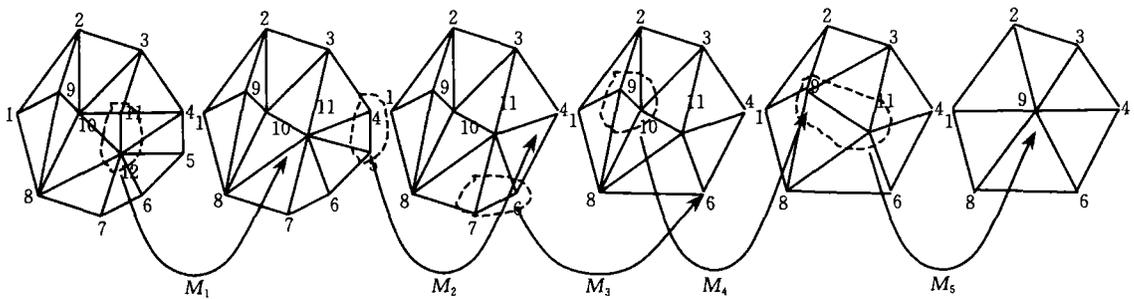


图 4 修改操作的依赖关系生成过程

我们发现, 依赖关系图可以用一张有向图来描述 (如图 5 所示). 确定各修改操作的依赖关系就是对

其进行拓朴排序. 例如, 当我们在增大网格模型的分辨率, 即进行拆分操作时的依赖关系是 $m_5 \rightarrow m_4 \rightarrow$

$m_3 \rightarrow m_2 \rightarrow m_1$, 也就是说要想执行操作 m_1 , 必须顺序地先执行 m_5, m_4, m_3 和 m_2 拆分操作. 反之, 当减小网格模型分辨率时, 删除操作的依赖关系是 $m_1 \rightarrow m_2 \rightarrow m_3 \rightarrow m_4 \rightarrow m_5$. 只有这样, 才能保证在调整网格模型分辨率时产生的三角片都是在初始向下采样过程中出现过的三角片, 且都经过了连续性检查、形状检查, 因而可以确保模型的正确性. 当然, 拓朴顺序不只一种, 拆分操作时 $m_5 \rightarrow m_3 \rightarrow m_2 \rightarrow m_4 \rightarrow m_1$ 也是一个正确的选择.

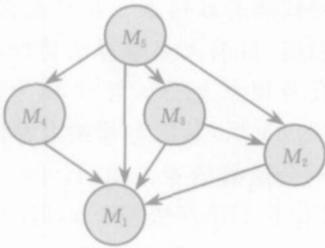


图 5 依赖关系有向图

4 实验结果

本文算法已用 C++ 语言实现. 为验证算法的有效性, 我们测试了许多模型, 做了大量的实验, 其中两例为 Fandisk 模型和 Venus 头部模型. Fandisk 的外接包围盒尺寸分别为 $4.8 \times 5.6 \times 2.7$, 有 12846 个三角片.

本文算法的时间消耗主要集中在初始向下采样过程中. 表 1 为本文算法与其它算法处理 Fandisk

模型的时间消耗比较. 统计的时间段为读入模型后向下采样至 90% 顶点被删除为止. 从表中可以看出, 由于本文算法需计算全局最大误差, 因而计算速度较大多数算法慢, 但仍然比 Hoppe 的算法快许多. 不过, 由于向下采样过程不必在线进行, 对算法的实施影响不大. 而初始向下采样完成, 也就是网格多分辨模型建立好后, 在最大分辨率和最小分辨率之间调整网格模型的分辨率几乎可以是实时地完成.

表 1 初始向下采样消耗时间比较

Scheme	Hardware	Memory	Time(s)
Schroeder ^[16]	SGI Indigo2, R4400, 200MHz	128MB	10.00
Cohen ^[17]	SGI Indigo2, R4400, 200MHz	128MB	185.22
Hoppe ^[11]	Digital 3000/900 Alpha 275MHz	128MB	2300.00
Garland ^[12]	SGI Indigo2, R4400 250MHz	128MB	45.11
本文算法	Pentum IV 1.6GHz	256MB	242.00

同其它算法相比, 本文算法的一个突出优点是在简化过程中记录了每一步简化所产生的全局最大误差, 因此可以方便地以全局最大简化误差来控制网格模型的分辨率. 为了量化地评估本文算法误差控制的精确程度, 我们利用 Metro^[15] 工具来测量简化网格模型与初始网格模型之间的 Hausdorff 距离也即最大误差. 图 6 为以简化误差控制 Fandisk 的多分辨显示, 图 6(a)~图 6(d) 为线框模型, 图 6(e)~图 6(h) 分别为对应的光照模型. 从图中可以看出, 本文的简化算法较好地完成了对初始网格模型的向下采样, 网格模型的细节得到了最大程度的保留. 表 2 为以全局最大误差控制网格模型的分辨率

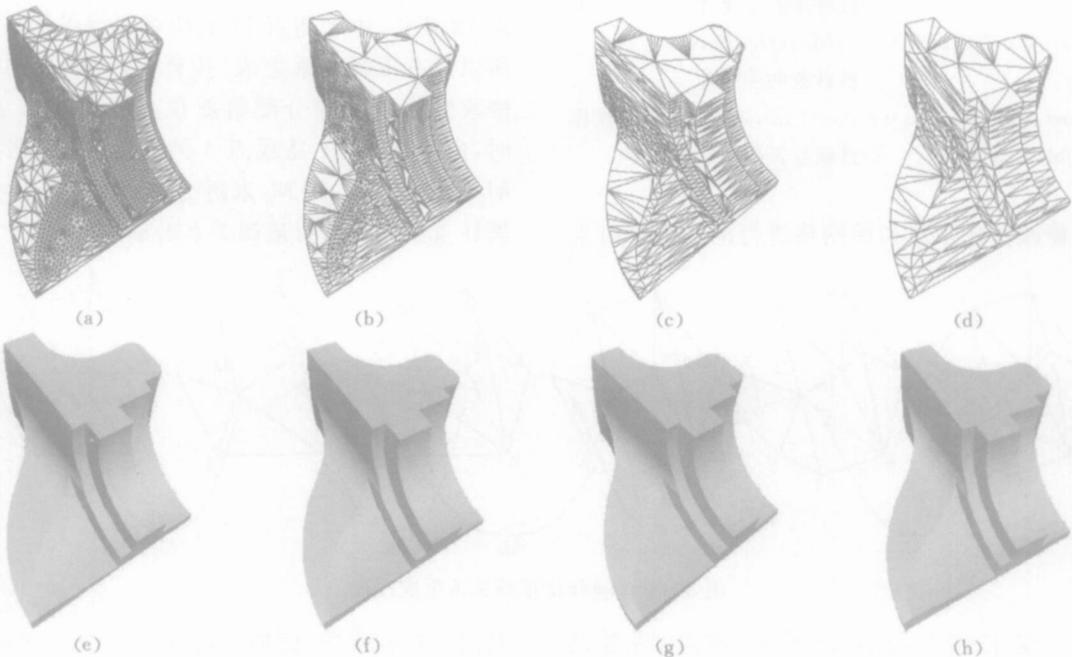


图 6 Fandisk 模型的多分辨显示

的实验数据,从表中可以看出本文算法保证了简化网格模型的全局最大误差满足输入的要求,在需要以简化误差来控制网格模型分辨率时(如快速原型制造等),使用起来十分方便.本文算法还可以方便地实现误差可控的选择细化功能.图 7 为对 Venus 进行的选择细化效果.从图中可以看出,本文提出的修改操作依赖关系确保了在选择细化过程中,所有

的三角片都是在对初始网格向下采样过程中出现过的三角片,因而三角片的质量得到保证,没有病态或错误三角片产生,同时还可以保证细化局部的误差不超过指定值,这进一步增加了多分辨率网格的灵活性,使得某些需要保证精度的表面(如配合面)既能与其它部分具有不同的分辨率,又能满足指定的误差要求.



图 7 Venus 模型的选择细化

表 2 多分辨率实验结果

模型	输入误差值	三角片数	Metro 实测误差值	图号
Fandisk 1	0.000001	6648	0.000001	图 6(a), (e)
Fandisk 2	0.0001	2637	0.000098	图 6(b), (f)
Fandisk 3	0.0005	1410	0.000486	图 6(c), (g)
Fandisk 4	0.001	847	0.000994	图 6(d), (h)

5 结 论

三角网格的多分辨模型是解决三角网格过大和只具有固定分辨率等缺点的有效方法.本文提出一种网格多分辨模型生成算法,以基于最大误差 L_∞ 控制的网格简化算法为基础,以删除边和拆分点操作进行网格模型的向下采样和向上采样,将网格模型表示为由一个低分辨率的网格和一系列修改操作组成的多分辨模型.本文算法在向下采样时,重点考虑了简化误差对模型精度的影响,在生成网格多分辨模型时,该算法将细化操作分解为对网格模型的几何修改信息和各细化操作之间的关系信息,同时,该算法将全局简化误差保存在每一步修改操作中,既确保了多分辨网格模型的健壮性,又使得通过全局最大简化误差来控制分辨率成为可能.下一步的研究包括:(1)带颜色、纹理的网格模型的多分辨模型建立;(2)可控误差的网格模型多分辨编辑等.

参 考 文 献

- 1 Cignoni P., Montani C., Scopigno R.. A comparison of mesh simplification algorithms. *Computer & Graphics*. 1998, 22 (1): 37~54
- 2 Luebke D.. A survey of polygonal simplification algorithms. Department of Computer Science, University of North Carolina at Chapel Hill; Technical Report TR97-045, 1997
- 3 Pan Zhi Geng, Ma Xiao Hu, Shi Jiao Ying. Overview of multiple level of detail creation. *Journal of Image and Graphics*, 1998, 3(9): 754~759(in Chinese)
(潘志庚, 马小虎, 石教英. 多细节层次模型自动生成技术综述. *中国图象图形学报*, 1998, 3(9): 754~759)
- 4 Hoppe H.. Progressive meshes. In: *Proceedings of the ACM SIGGRAPH*, New Orleans, Louisiana, 1996, 99~108
- 5 Eck M., DeRose T., Duchamp T. *et al.*. Multiresolution analysis of arbitrary meshes. In: *Proceedings of the ACM SIGGRAPH*, Los Angeles, California, 1995, 173~182
- 6 Hoppe H.. View-dependent refinement of progressive meshes. In: *Proceedings of ACM SIGGRAPH*, Los Angeles, California, 1997, 189~197
- 7 Kobbelt L., Vorsatz J., Seidel H. P.. Multiresolution hierarchies on unstructured triangle meshes. *Computational Geometry*, 1999, 14(1): 5~24
- 8 Guskov I., Sweldens W. *et al.*. Multiresolution signal processing for meshes. In: *Proceedings of the ACM SIGGRAPH*, Los Angeles, California, 1999, 325~334

- 9 Liu Xin Guo, Bao Hu Jun, Heng Phen Gann, Peng Qun Sheng. Volume preserved multiresolution mesh modeling. Chinese Journal of Computers, 2000, 23(9): 905~910(in Chinese) (刘新国, 鲍虎军, 王平安, 彭群生. 体积保持的多分辨率多边形网格的光顺造型. 计算机学报, 2000, 23(9): 905~910)
- 10 Cheng Chi Yi, Pan Zhi Geng, Shi Jiao Ying. A new representation method for multi resolution models. Journal of Computer Aided Design and Computer Graphics, 2001, 13(7): 610~616(in Chinese) (成迟慧, 潘志庚, 石教英. 一种新的多分辨模型表示方法. 计算机辅助设计与图形学学报, 2001, 13(7): 610~616)
- 11 Hoppe H., DeRose T. *et al.*. Mesh optimization. In: Proceedings of the ACM SIGGRAPH, Anaheim, California, 1993, 19~26
- 12 Garland M., Heckbert Paul S.. Surface simplification using quadric error metrics. In: Proceedings of the ACM SIGGRAPH, Los Angeles, California, 1997, 209~216
- 13 Kim Sun Jeong, Kim Chang Hun, Levin D.. Surface simplification using a discrete curvature nom. Computer & Graphics, 2002, 26(5): 657~663
- 14 Xia J., Varshney A.. A dynamic view dependent simplification for polygonal models. In: Proceedings of the IEEE Visualization, San Francisco, CA, 1996, 327~334
- 15 Cignoni P., Rocchini C., Scopigno R.. Metro: Measuring error on simplified surfaces. Computer Graphics Forum, 1998, 17(2): 167~174
- 16 Schroeder W. J. *et al.*. Decimation of triangle meshes. In: Proceedings of the ACM SIGGRAPH, Chicago, Illinois, 1992, 65~70
- 17 Cohen J., Varshney A. *et al.*. Simplification envelopes. In: Proceedings of the ACM SIGGRAPH, New Orleans, Louisiana, 1996, 119~128



TANG Jie, born in 1971, Ph. D., postdoctoral scholar. His research interests include CAD/CAM, CAGD, computer graphics.

ZHANG Fu Yan, born in 1939, professor, Ph. D. supervisor. His research interests include computer graphics multimedia technology.

Background

The project, "Research on Several Key Technologies of Mesh Processing for Reverse Engineering", is supported by the postdoctoral research foundation of Nanjing university. The aim of this project is to solve some key problems of mesh processing for reverse engineering, including discrete curva

ture analysis, mesh smoothing, multiresolution analysis, watermarking of 3D mesh, etc. This paper puts forward a new algorithm to generate multiresolution model of mesh based on L_{∞} error control.